Livret d'entrainement : exercices niveau Seconde

(exercices donnés dans les écoles parisiennes)

1.1 Calcul numérique

Ex 1 ☆☆ ★☆ **Le ballon de foot**

Un ballon de football est formé de 12 pentagones réguliers et de 20 hexagones réguliers assemblés entre eux par une couture.
Leurs côtés mesurent 4,5 cm.

Trouver la longueur de la couture.

Ex 2 ☆☆ ★☆

Calculer et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{3 - \frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}}$$

$$B = \frac{6 - \frac{5}{2} + \frac{3}{8}}{3 - \frac{5}{2} - \frac{7}{4}}$$

$$C = \frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \times \frac{\frac{5}{6} + \frac{7}{3}}{1 - \frac{5}{6}} \times \frac{-\frac{2}{5} + 1}{\frac{2}{5} - 1}$$

$$D = \frac{\frac{5}{6} + \frac{1}{5}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{5}} \times \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}} \times \frac{\frac{1}{4} - 5}{1 + \frac{1}{4}}$$

$$E = \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3}\right) \times \frac{2 - \frac{4}{7}}{3} \times \frac{1}{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}$$

$$F = \frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{8} + \frac{3}{7}} \times \frac{\frac{2}{3} + \frac{7}{5}}{\frac{1}{12} - \frac{23}{3}}$$

Ex 3 ☆☆ ★☆

Calculer les expressions suivantes en donnant les résultats sous forme de fractions irréductibles :

$$A = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$$

$$B = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$$

$$C = 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{4}}}$$

$$D = 1 + \frac{2}{3 + \frac{2}{3 - \frac{2}{1 - \frac{1}{2}}}}$$

Ex 4 ☆☆ ★☆

Simplifier le produit (Les points de suspension indiquent que l'on continue le processus jusqu'au dernier terme) :

$$p = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{2020}\right)$$

Ex 5 ☆☆ ★☆

Donner sous forme décimale :

$$A = \frac{10^4 \times 7^{-1}}{2^7 \times 7^{-3} \times 5^7}$$

$$B = \left(\frac{3^{-9} \times \left(10^{-3}\right)^{-2}}{2^{-1} \times 10^5 \times 3^{-10}}\right)^2$$

$$C = \frac{2,5^5 \times 3^{-2} \times 4^5 \times 18^3}{5^8 \times 3^{-4} \times 9^3 \times 2^8}$$

Ex 6 ☆☆ ★☆

1) Simplifier $A = \sqrt{(3-\pi)^2}$

2) Soit $B = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ et $C = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.
Prouver que B = C.

3) Soit $D = \sqrt{10 - 2\sqrt{21}}$ et $E = \sqrt{3} - \sqrt{7}$.
A-t-on D = E ?

4) Soit $F = \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{3 + \sqrt{8}}$.
Prouver que F est un nombre entier.

Ex 7 ☆☆ ★☆

Réduire les expressions suivantes

$A = 2\sqrt{500} - 3\sqrt{75}$
$B = \sqrt{27} + 2\sqrt{75} - \sqrt{108}$
$C = 2\sqrt{32} + 3\sqrt{18} - 3\sqrt{50}$
$D = \sqrt{27} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{12}$
$E = -\sqrt{245} + 2\sqrt{45} + 5\sqrt{20}$
$F = \sqrt{27} + 2\sqrt{75} - \sqrt{12}$
$G = \sqrt{45} + 2\sqrt{125} - \sqrt{80}$
$H = \sqrt{150} + \sqrt{96} - 4\sqrt{24}$
$I = 3\sqrt{27} + 4\sqrt{300} - 5\sqrt{3}$
$J = \sqrt{80} - 2\sqrt{320} - 5\sqrt{45} + \sqrt{180} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{125}$

Ex 8 ☆☆ ★☆

Transformer chacune des expressions suivantes pour qu'il n'y ait plus de radical au dénominateur :

$$A = \frac{5}{\sqrt{6} - 1} \qquad K = \frac{1 + \sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

$$F = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \qquad L = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

$$I = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \qquad M = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$$

$$J = \frac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \qquad N = \frac{1 + \sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{3}}$$

Ex 9 ☆☆ ★★

On pose $B(n) = \dfrac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^n - 4^{n-1})^3}$.

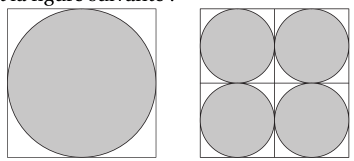
1) Calculer $B(n)$ pour $n = 0$ et $n = 1$.

2) Montrer que $B(n)$ ne dépend pas de n.

Ex 10 ☆☆ ★★

$\mathcal{Q}$ est un carré de 1 m de côté et $\mathcal{C}$ en est le cercle inscrit.

Si on partage $\mathcal{Q}$ en carrés plus petits et que l'on y trace leurs cercles inscrits respectifs, on obtient la figure suivante :



Augmentez, autant que vous l'imaginez, le nombre de subdivisions. L'aire de la partie grisée (celle couverte par les disques) croît-elle, décroît-elle, ou reste-t-elle toujours la même ?

Ex 11 ☆☆ ★★

Dans chacun des cas, déterminer la valeur de n telle que :

a)

$$\left(\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5}\right)\left(\frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5}\right) = 2^n$$

a) $3^{2001} + 3^{2002} + 3^{2003} = n3^{2001}$
c) $(10^{2002} + 25)^2 - (10^{2002} - 25)^2 = 10^n$.

Ex 12 ☆☆ ★★

Sans calculer les facteurs, prouver que

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) = 2^{32} - 1.$$

1.2 Calcul algébrique

Ex 13 ☆☆ ★☆

Développer et réduire les expressions suivantes.

$A=(-7x+6)(-6x-8)$
$B=(-x-10)(-9x+2)$
$C=(6x+2)^2+(9x-3)(9x+3)$
$D=(3x-6)^2-(-4x-10)(3x+8)$
$E=-(8x+4)(3x-10)-(6x-5)(6x+5)$
$F=(6x-7)^2+(5x+10)^2$

Ex 14 ☆☆ ★☆

Factoriser les expressions suivantes.

$A=81x^2-4$
$B=(-x-2)(-3x-4)+(8x+4)(-3x-4)$
$C=16-(-8x-6)^2$
$D=(-9x+2)(7x-2)-(-9x+2)$
$E=49x^2-36+(7x+6)(5x+8)$
$F=(-5x+4)^2-(-8x+4)(-5x+4)$

Ex 15 ☆☆ ★★

Si $x+\dfrac{1}{x}=6$, déterminer $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

Ex 16 ☆☆ ★☆

Développer, puis réduire

$A=(2x^2-y)^2$
$B=(3x^2-2y^3)(3x^2+2y^3)$
$C=(4abc-5ac)^2$
$D=(12a^4-11ab)(11ab+12a^4)$
$E=(3a-2)(3a+2)(9a^2+4)$
$F=(2a-3)^2(2a+3)^2$

Ex 17 ☆☆ ★☆

Développer, puis réduire

$A=(3x-2y-1)^2$
$B=(3x+y+z)(3x-y-z)$
$C=(2a^n-a^{n+1})^2$
$D=(4a^{3n}+3a^{2n})(4a^{3n}-3a^{2n})$
$E=\left[x^2+(2+\sqrt{2})x+1+\sqrt{2}\right]\times\left[x^2+(2-\sqrt{2})x+1-\sqrt{2}\right]$
$F=\left(x^2+x\sqrt{3}+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2-x\sqrt{3}+1\right)$

Ex 18 ☆☆ ★★

Développer, puis réduire

$A=(3-y)^2$ | $E=(xy-4y)^2$
$B=(5-2x^2)^2$ | $F=(ax+by)^2$
$C=(2ab^2-3c^3d^4)^2$ | $G=(a+2b+3c)^2$
$D=(x+2y)^2-4xy$ | $H=(a+2b-c)^2$

Ex 19 ☆☆ ★★

Factoriser au mieux.

$A=9ab-6a^2+12ab^2$
$B=a^3b^2c-a^2bc+a^5b^3c^2$
$C=16(a-b)-x^4(a-b)$
$D=25(x^2-y^2)+a^2(y^2-x^2)$
$E=5ax-5ay-bx+by$
$F=4a^2(3-x)-(4a-1)(3-x)$
$G=(25a^2+1-10a)-9a^2$
$H=(x-y)^n-4x(x-y)^{n-1}+y(x-y)^{n-2}$

Ex 20 ★☆ ★★

1) Soient x et y des réels avec
$$2x+3y=3 \text{ et } xy=-4.$$
Déterminer $4x^2+9y^2$.

2) Soient x et y des réels avec
$$x-y=3 \text{ et } xy=4.$$
Déterminer x^2+y^2.

3) Soient a et b des réels avec
$$a+b=13 \text{ et } ab=41$$
Calculer a^3+b^3.

4) Soient x et y des réels avec
$$x+y=4 \text{ et } xy=-3.$$
Déterminer x^2+y^2 puis x^4+y^4.

Ex 21 ★☆ ★★

Soient a et b des réels tels que
$$\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}=1$$
Démontrer que $a^3+b^3=a+b$.

Ex 22 ☆☆ ★★ **Formule de Héron**

La formule de Héron permet de calculer l'aire d'un triangle connaissant ces trois côtés.

Si les longueurs des côtés sont a, b, c alors en appelant p le demi-périmètre du triangle et S l'aire du triangle, on a
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
Pour la démonstration, on considère un triangle ABC, de hauteur AH, tel que $\widehat{BAC}$ soit un angle aigu. On appelle :

- a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, AC et AB;
- h_a la hauteur AH;
- x la longueur HC.

1) Exprimer S en fonction de a et h_a.

2) Exprimer p en fonction de a, b et c.

3) Exprimer c^2 en fonction de a, b et x.

4) a) En déduire l'écriture de x en fonction de a, b et c.

b) En déduire l'écriture de h_a^2 en fonction de a, b et c.

Prouver que :
$$h_a^2=\left(b-\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\times\left(b+\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)$$
puis que
$$h_a^2=\frac{1}{4a^2}\left(2ab-a^2-b^2+c^2\right)\left(2ab+a^2+b^2-c^2\right)$$

c) Factoriser $\left(2ab-a^2-b^2+c^2\right)$.

d) Factoriser $\left(2ab+a^2+b^2-c^2\right)$.

5) En déduire la formule de Héron.

1.3 Algorithmique

Ex 23 ☆☆ ★☆

Les deux exemples ci-dessous vous donnent un algorithme de calcul du carré d'un naturel se terminant par 5.

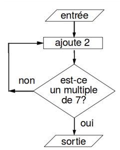
- Calcul de 65×65
  $6\times6=36$
  $36+6=42$
  $65\times65=4225$
- Calcul de 75×75
  $7\times7=49$
  $49+7=56$
  $75\times75=5625$

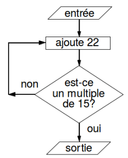
Justifier cet algorithme puis l'appliquer pour calculer 125^2 et 405^2

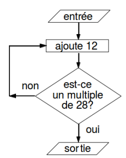
Ex 24 ☆☆ ★☆

Pour chacun des organigramme, écrire un programme Python lui correspondant.

Déterminer les résultats obtenus en entrant les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11 et 12 dans chacun des organigrammes.



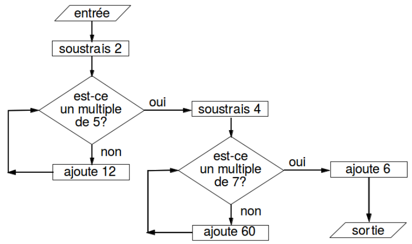




Ex 25 ☆☆ ★☆

Écrire un programme Python correspondant à cet organigramme.

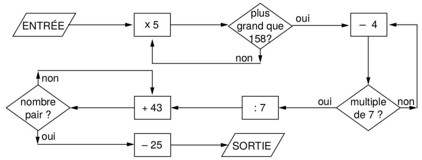
Si l'on entre le nombre 123, quel nombre obtient-on à la sortie?



Ex 26

Écrire un programme Python correspondant à cet organigramme.

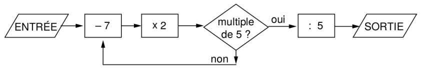
Si l'on entre le nombre 27, quel nombre obtient-on à la sortie?



Ex 27 ☆☆ ★☆

Quel nombre entier faut-il introduire dans l'organigramme suivant pour obtenir 14 à la sortie ? (3 solutions)

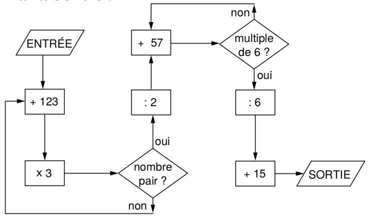
Pourquoi n'obtiendra-t-on jamais un nombre impair à la sortie ?



Ex 28 ☆☆★☆

On introduit un nombre entier positif dans l'organigramme suivant.

Quel est le plus petit nombre que l'on peut obtenir à la sortie ?



Ex 29 ☆☆★★

Écrire un algorithme qui compte le nombre de couples (a, b) avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ solutions de l'inéquation $a^2 + b^2 \leqslant 1\,000$.

Ex 30 ☆☆★★ Inéquations

Écrire un algorithme de résolution des deux problèmes suivants. Traduire ensuite ces algorithmes en Python et résoudre les problèmes :

1) À partir de quel entier n a t-on $1{,}01^n > 100$?

2) À partir de quel entier n a t-on $1{,}25 + 1.25^2 + 1{,}25^3 + \cdots + 1{,}25^n > 10^5$?

Ex 31 ☆☆★★ Dichotomie

Sachant que l'équation $E_1 : x^3 + x^2 + 1 = 0$ n'a qu'une solution réelle notée x_0 et que $x_0 \in [-2; -1]$, on se propose de déterminer une valeur approchée de x_0 à 10^{-P} près à l'aide de l'algorithme suivant :

- `Entrer A et B`
- `Entrer P`
- `Calculer X = f(A) et Y = f(BA)`
- `Tant que B − A > 10^−P`
  - `Calculer C = (A + B) ÷ 2 et Z = f(C)`
  - `Si X × Z < 0 alors : B = C et Y = Z`
  - `Sinon : A = C et X = Z`
- `Afficher C`

1) Programmer cet algorithme en Python puis déterminer x_0 à 10^-6 près puis à 10^-9 près.

2) Résoudre l'équation $E_2 : x^3 + 10x^2 - 250x - 1500 = 0$ par dichotomie. On commencera par rechercher le nombre de solutions avec un traceur de courbes ainsi que des encadrements à l'entier pour chacune d'elles.

Ex 32 ☆☆★★ QCM

Un QCM comporte cinq questions. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées mais une seule est exacte. Une réponse juste vaut 2 points, une réponse fausse enlève 1 point et lorsque le résultat est négatif on met 0.

On veut simuler cette situation pour des candidats qui donnent une réponse au hasard pour chacune des cinq questions. L'algorithme suivant simule cette situation et calcule la note moyenne obtenue par N candidats sans tenir compte de la contrainte soulignée plus haut.

- `Entrer N ; affecter 0 à T`
- `Pour I allant de 1 à N :`
  - `Affecter 0 à S`
  - `Pour J allant de 1 à 5 :`
    - `Affecter random() à R`
    - `Si R ⩽ 0,25 alors affecter S + 2 à S ; sinon affecter S − 1 à S`
  - `Affecter T + S à T`
- `Afficher T ÷ N`

1) Que doit-on corriger dans l'algorithme pour tenir compte de la contrainte soulignée ?

2) Expliquer l'instruction conditionnelle « `Si R ⩽ 0,25 alors affecter S + 2 à S ; sinon affecter S − 1 à S` »

3) Programmer l'algorithme corrigé pour tenir compte de la contrainte soulignée, puis lancer le programme pour $N \in \{5, 50, 500\}$. Noter à chaque fois la note moyenne obtenue.

4) Ajouter un compteur pour déterminer le pourcentage de candidats ayant 0 à ce QCM. Donner ce pourcentage pour les valeurs de N testées.

Ex 33 ☆☆★★ Devine un nombre

Le plus simple des jeux : la calculatrice choisit un nombre entre 1 et 100, et le joueur doit deviner ce nombre.

Pour cela, il propose un nombre et la calculatrice répond « plus » ou « moins ».

Elle compte le nombre d'essais et, quand le joueur a trouvé la bonne réponse, elle affiche le nombre d'essais.

Ex 34 ★☆★★ Entraînement aux tables

La calculatrice choisit aléatoirement deux nombres entiers entre deux bornes, par exemple 2 et 10, et demande le produit de ces deux nombres.

Si le résultat entré par le joueur est correct, elle propose un autre produit. Sinon, elle repose la question.

Dans tous les cas, le nombre de bonnes réponses est enregistré ainsi que le nombre de question. On peut afficher le pourcentage de bonnes réponses avant chaque nouvelle question.

Prévoir l'arrêt du programme quand l'utilisateur entre 0.

Prolongement possible : prévoir un mode *expert* dans lequel les questions pourraient être formulées sous la forme d'un division (exemple $81 \div 9 = ?$).

1.4 (In)équations

Ex 35 ☆☆★☆ 1er degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du 1er degré :

1) $\dfrac{-4x-6}{3} - \dfrac{-4x-2}{6} = \dfrac{-7x-5}{2}$

2) $\dfrac{-3x+6}{8} - \dfrac{x+10}{3} = \dfrac{-5x+10}{4}$

3) $\dfrac{x+3}{2} - \dfrac{4x-3}{3} = 1 - \dfrac{5x-12}{6}$

4) $(2x+5)^2 - 2(7x+4) = 4(x+3)^2 - 1$

5) $(2x+1)^2 - 3(x^2-1) = (x+3)^2 - 5x + 4$

6) $\dfrac{4}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{5x-6}{x^2-4}$

Ex 36 ☆☆★☆ Équation produit

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations (se ramener à des équations produits) :

1) $(3x+1)(5x-3) = 0$

2) $(3-x)(4-x)(10-x) = 0$

3) $\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 = 4\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2$

4) $-x(5-x) + 3(x-5)^2 = x^2 - 25$

5) $x(x+1)(x+2) = (x+1)(x+2)(x+3)$

6) $2x(x^2+2) = x^2(x^2+2)$

Ex 37 ☆☆★☆ carré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $3x^2 - 1 = 0$

2) $0{,}04x^2 = 1$

3) $7x^2 = \dfrac{1}{15}$

4) $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 6$

Ex 38 ★☆★★

Résoudre

$\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

Ex 39 ☆☆★☆ Un problème d'Euler

Un père mourut en laissant quatre fils, ceux-ci se partagèrent ses biens de la manière suivante :

- le premier prit la moitié de la fortune moins 3 000 livres ;
- le deuxième prit le tiers de la fortune moins 1 000 livres ;
- le troisième prit exactement le quart de la fortune ;
- le quatrième prit 600 livres plus la cinquième partie de la fortune.

1) Quelle est la fortune laissée par le père ?

2) Quelle somme reçut chaque enfant ?

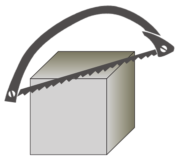
Ex 40 ☆☆★☆

Lorsqu'on ajoute un même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\dfrac{1789}{1994}$, on obtient 2 comme résultat.

Quel est ce nombre ?

Ex 41 ☆☆★☆

Où faut-il scier ce cube de 10 cm d'arête de manière à obtenir un prisme dont la base est un triangle isocèle et dont le volume est le tiers de celui du reste du cube ?



Ex 42 Le paradoxe de la ficelle

Si on enroulait une ficelle autour de l'équateur (environ 40 000 km) et qu'on rallongeait cette ficelle d'un mètre de façon à former une nouvelle circonférence, à quelle hauteur au-dessus du sol se trouverait-elle ?

Ex 43 Solution de glucose

Dans un certain test médical destiné à mesurer la tolérance aux hydrates de carbone, un adulte boit 7 centilitres d'une solution à 30 % de glucose. Lorsque le test est administré à un enfant, la concentration de glucose doit être ramenée à 20%.

Combien de solution à 30 % et combien d'eau devra-t- on utiliser pour préparer 7 centilitres de solution à 20 % ?

Ex 44 2nd degré

On se propose de résoudre l'équation :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

1) Démontrer que cette équation est équivalente à : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

2) Résoudre alors cette dernière équation.

Cette exercice nous indique une méthode pour résoudre n'importe quelle équation du second degré...

Ex 45

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $4x^2 + 7x - 2 = 0$;

2) $2x^2 - 3x - 6 = 0$;

3) $(2x+3)^2 = 4x^2 - 6x + 9$;

4) $x^2 - 3 = 4x^2 + 0,5x + 1$;

5) $6x^2 + 18x + 42 = -x^2 - 5x + 3$;

Ex 46

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes. Poser d'abord $X = x^2$ et résoudre en X dans un premier temps.

a) $x^4 + x^2 - 12 = 0$;

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;

Ex 47

Vérifier que 4 et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont solutions de l'équation :

$$-2x^2 + x(8 + \sqrt{3}) - 4\sqrt{3} = 0$$

Ex 48

Un sol est recouvert de 500 carreaux carrées. Si l'on avait utilisé des carreaux de 5 cm plus longues et plus larges, il en aurait fallu 320 pour recouvrir le sol.

Quelles sont les dimensions des premiers carreaux ?

Ex 49

Deux trains partent en même temps de deux villes A et B distantes de 360 km. Ils se rencontrent au bout de 4 heures. Pour que la rencontre se fasse à mi-distance, il aurait fallu que le train à destination de B parte 54 minutes avant l'autre.

Calculer la vitesse moyenne des deux trains.

Ex 50

Deux voyageurs A et B distants de 66km vont l'un vers l'autre. A part trois heures après B. Après la rencontre, B met 1h 36min pour achever le trajet et A, 6h 15min.

Déterminer le point de rencontre.

Ex 51

La vitesse du courant d'un fleuve est de 5km/h. Il faut à un rameur 30 minutes de plus pour parcourir 1,2km en remontant le courant que pour la même distance en descendant.

Quelle est la vitesse du canoë en eau tranquille ?

Ex 52 Dimensions d'un comprimé

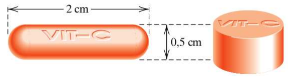
La rapidité avec laquelle un comprimé de vitamine C se dissout dépend de sa surface.

Une première sorte de comprimé a 2 centimètres de long et a la forme d'un cylindre terminé à chaque extrémité par un hémisphère de 0,5 centimètre de diamètre, comme le montre la figure.

Une seconde sorte de comprimé a la forme d'un cylindre circulaire droit de 0,5 centimètre de hauteur.

1) Calculer le diamètre du second comprimé pour que son aire soit égale à celle du premier comprimé.

2) Calculer le volume de chaque comprimé.



Ex 53

Résoudre les systèmes

1) $\begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + 8y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{3}c + \frac{1}{2}d = 5 \\ c - \frac{2}{3}d = -1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = -\frac{4}{15} \\ 5x - \frac{y}{2} = \frac{13}{2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = 5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ \frac{6}{4}x = \frac{5}{2} - \frac{y}{2} \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ \frac{1}{2}x + 3y = \frac{11}{2} \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}z = 6 \end{cases}$

Ex 54

Écrire les ensembles comme un intervalle ou une réunion d'intervalles.

1) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 35 < 0\}$.

2) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+7}{x-5} \geqslant 0\right\}$.

3) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+7}{x-5} \leqslant -2\right\}$.

4) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 \leqslant 0\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1-x}{x+3} \geqslant 1\right\}$

Ex 55

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $(3x+1)(-2x+5) \leqslant 0$

2) $\frac{3x-8}{2x+3} \leqslant 0$

3) $(x-2)(3x+5)(3-7x) < 0$

4) $\frac{7x-2}{4x^2-1} \leqslant 0$

5) $\frac{4x^3 - 9x}{x^2 - 16} \geqslant 0$

6) $(3x+2)^2 - (x-1)^2 \leqslant 0$

7) $(5x+1)^2 + 9 \leqslant 0$

8) $(3x^2+1)(9-2x) > 0$

9) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+3x+2} > 0$

Ex 56

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $(2x-1)^2 \leqslant 3$

2) $(x+3)^2 > 5(x+3)(x-2)$

3) $(x-1)^2(x-2) < (x^2-1)(2-x)$

4) $\frac{x-1}{x+1} > 2$

5) $\frac{3x-2}{5-3x} \geqslant 1$

6) $\frac{2x+1}{x+2} \geqslant x$

7) $\frac{5x+3}{3x+5} \leqslant \frac{3x+5}{5x+3}$

Ex 57

Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{n\}$, l'inéquation

$$\frac{1}{x-n} \geqslant x - n.$$

Ex 58

Résoudre les inéquations :

1) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geqslant -x + 2$.

2) $\frac{1 - \sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{1}{2}$.

3) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-5} \geqslant \sqrt{5-2x}$.

1.5 Fonctions

Ex 59

Donner le domaine des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + x$

2) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{3x+7}$

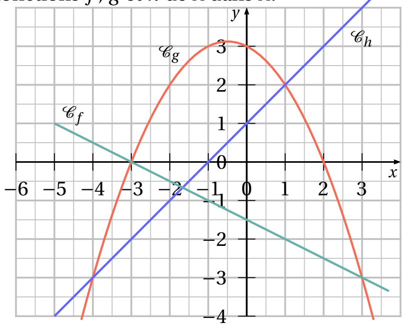
4) $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{\sqrt{x-1}}$

5) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 10x + 21}$

6) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2-x}{x+5}}$

Ex 60

Voici les représentations graphiques de trois fonctions f, g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.



1) Déterminer à partir de ces graphes :

$f(1)$	$f(-2)$	$f(0)$
$g(1)$	$g(-2)$	$g(0)$
$h(1)$	$h(-2)$	$h(0)$

2) « Le point $(-49;-48)$ appartient à la courbe représentative de h. » VRAI ou FAUX ?

3) Compléter

Si $f(x) = -3$, alors $x = \dots$

Si $g(x) = 3$, alors $x = \dots$

Si $h(x) = 0$, alors $x = \dots$

Si $f(x) = g(2)$, alors $x = \dots$

Si $f(x) = h(x)$, alors $x = \dots$

Si $g(x) > f(x)$, alors $x \dots\dots$

Si $g(x) = h(x)$, alors $x = \dots$

4) Sur quel ensemble f est-elle positive ?

Sur quel ensemble g est-elle négative ?

Sur quel ensemble h est-elle strictement positive ?

Ex 61

1) Pour $x \geqslant 0$, comparer : $(x+1)^2$ et x^2 ;

2) Pour $x \leqslant 0$, comparer : $(x-4)^2$ et $(x-3)^2$;

3) Pour $x \geqslant 5$, comparer : $(x-4)^2$ et $(x-3)^2$;

Ex 62

Donner un encadrement de x^2 lorsque :

a) $x \in [1;2]$; b) $x \in [3;7[$; c) $x \in]-4;-1]$;

d) $x \in]-8;0[$; e) $x \in [-3;5]$; f) $x \in \left]-\sqrt{5};2\right]$.

Ex 63

À partir de la parabole représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$ dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, comment tracer aisément la courbe de :

1) $g(x) = -x^2$;

2) $h(x) = (-x)^2$;

3) $i(x) = (x+3)^2$;

4) $j(x) = (x-1)^2$;

5) $k(x) = x^2 + 7$

6) $l(x) = \dfrac{x^2}{3}$;

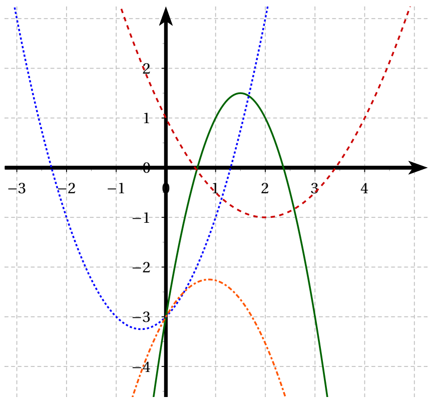
7) $m(x) = (x-2)^2 - 1$

Ex 64

Par lecture graphique, associer à chacune des fonctions ci-dessous sa courbe représentative.

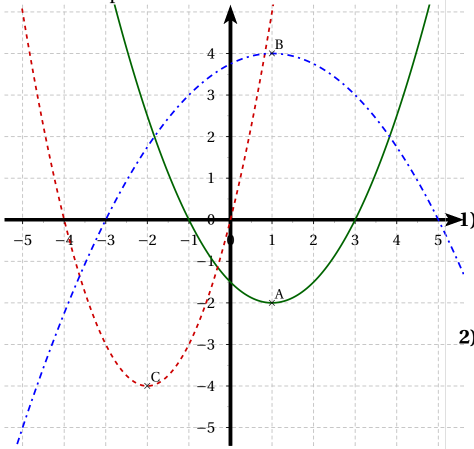
a) $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$; b) $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$;

c) $h(x) = x^2 + x - 3$; d) $k(x) = -x^2 + \sqrt{3}x - 3$.



Ex 65

À partir de lectures graphiques, déterminer les expressions factorisées puis développées, des trinômes représentés ci-dessous.

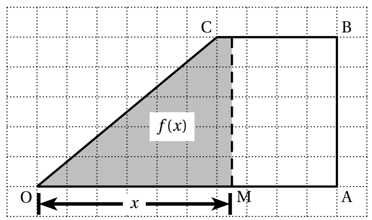


Ex 66

On considère un trapèze rectangle OABC avec OA = 10 cm, AB = 5 cm, et BC = 4 cm (cf. figure ci-contre à l'échelle). À tout point M du segment [OA], avec OM = x, on fait correspondre l'aire du domaine ombrée, notée $f(x)$ (exprimée en cm^2).

1) Donne une formule explicite de $f(x)$ sur chacun des intervalles $[0,6]$ et $[6,10]$

2) Représente graphiquement la fonction f



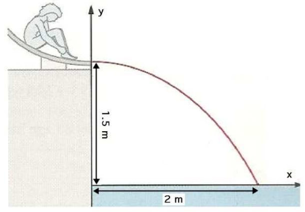
Ex 67

Une bille métallique de x cm de rayon $(0 < x < 5)$ repose sur le fond d'une boîte cubique de 10 cm d'arête.

Exprimer, en fonction de x, le volume d'eau $V(x)$ que l'on doit verser dans la boîte, de façon à recouvrir exactement la bille.

Ex 68

Caroline fait du toboggan à la piscine. Arrivée au bas du toboggan, sa trajectoire dans l'air est une parabole d'équation $y = ax^2 + h$.



1) La fin du toboggan se situe à 1,50 m au-dessus du niveau de l'eau et le point d'entrée dans l'eau est à 2 m du bord. Déterminer les valeurs de a et de h.

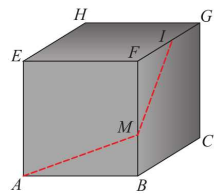
2) La valeur du paramètre a dépend de la vitesse (en m/s).

On sait que $a = -\dfrac{6}{v^2}$. Quelle est la vitesse de Caroline au moment de quitter le toboggan ?

Ex 69

On considère un cube d'arête 2 cm et l'on désigne par I le milieu de [FG] et par M un point quelconque du segment [BF].

On pose $x = $ BM.

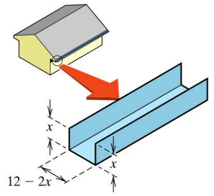


1) Exprimer, en fonction de x, la longueur du trajet « AMI » (segment AM, suivi du segment [MI]).

2) Trouver la valeur de x telle que la longueur de ce trajet soit minimale.

Ex 70

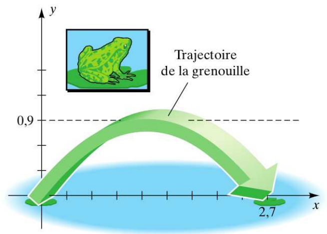
On veut faire une gouttière avec une longue feuille de métal de 12 cm de large en pliant les deux longs côtés et en les relevant perpendiculairement à la feuille. Quelle hauteur doivent avoir les côtés relevés pour que la gouttière ait une contenance maximale ?



Ex 71 ☆☆ ★☆ **Animaux sauteurs**

Les bonds des animaux sauteurs ont typiquement des trajectoires paraboliques. La figure illustre le bond d'une grenouille superposé à un système de coordonnées. La longueur du saut est de 2,7 m, et la hauteur maximale au-dessus du sol est de 0,9 m.

Donner une équation de la trajectoire du saut de la grenouille sous forme standard.



Ex 72 ★☆ ★★

Pour quelle valeur de a réel l'équation
$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|=a$$
possède une unique solution?

Ex 73 ★★ ★★

Démontrer qu'il n'existe pas de fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement croissante qui vérifie
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \ f(x^2)-(f(x))^2 \geqslant \frac{1}{4}$$
Indication : si f existe, utiliser $x=0$ et $x=1$.

1.6 Vecteurs et géométrie repérée

Ex 74 ☆☆ ★☆

Soit un triangle ABC.

1) Placer les points D et E définis par :
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}.$$

2) Montrer que les points A, D et E sont alignés.

3) Montrer que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Ex 75 ☆☆ ★☆

Dans un parallélogramme ABCD, on considère les points E et F définis par :
$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}.$$
Montrer que les points C, E et F sont alignés.

Ex 76 ☆☆ ★★

A et B sont deux points donnés. Placer le point M satisfaisant à la relation proposée après avoir déterminé le réel x tel que : $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$.

1) $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$;

2) $\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{0}$.

Ex 77 ☆☆ ★★

A, B et C sont trois points donnés. Placer le point M satisfaisant à la relation proposée après avoir déterminé le réel x et y tel que :
$$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}.$$

1) $\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$;

2) $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BC}$.

Ex 78 ☆☆ ★☆

Soit un triangle ABC. On considère les points K, L et M, milieux respectifs de [AB], [AC] et [BC], P le milieu de [LC] et Q le symétrique de K par rapport à B.

1) Donner les coordonnées des points P, M et Q dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2) Les points P, M et Q sont-ils alignés?

Ex 79 ☆☆ ★☆

Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC]. Placer le point D tel que : $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Montrer que ICDJ est un parallélogramme

Ex 80 ☆☆ ★☆

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A(−3;2), B(4;−2) et C(3;6).

1) Quelle est la nature du triangle?

2) Déterminer les coordonnées de H milieu de [AC].

3) Soit le point K(2;1). Montrer qu'il appartient à la médiane issue de B.

4) Calculer l'aire du triangle ABC.

Ex 81 ☆☆ ★☆

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points : A(−2;−3); B(4;−1), C(2;5).

1) Quelle est la nature du triangle ABC?

2) Déterminer les coordonnées du point R milieu [BC].

3) Soit le point E symétrique de A par rapport à R. Quelle est la nature du quadrilatère ABEC.

4) Déterminer les coordonnées du point F pour que le quadrilatère BCEF soit un rectangle.

5) Soit K le milieu de [AB] et L milieu de [AC]. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (CK) et (BL).

Ex 82 ☆☆ ★☆

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas, étudier si le triangle ABC est isocèle, rectangle, ou rectangle isocèle.

1) $A\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$, B(2;−1), $C\left(\frac{3}{2};-\frac{8}{3}\right)$

2) $A\left(\frac{1}{2};4\right)$, $B\left(-\frac{3}{2};1\right)$, $C\left(4;-\frac{1}{2}\right)$

3) A(2;5), B(5;11), C(−2;7).

Ex 83 ☆☆ ★☆

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Dans chacun des cas, déterminer une équation de la droite Δ.

1) Δ passe par $A(\sqrt{2}-1;3)$ et $B(1;\sqrt{2})$.

2) Δ passe par $A\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{2}\right)$ et admet le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

3) Δ passe par A(3;−5) et son coefficient directeur est $m=-\frac{7}{5}$.

4) Δ passe par $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et est parallèle à la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $3x+2y+7=0$

Ex 84 ☆☆ ★☆

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On donne le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\m\end{pmatrix}$ où m est un réel.

Dans chacun des cas suivants, déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\2\end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix}7m\\\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$

Ex 85 ☆☆ ★★

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points A(−2;1), B(3;3) et C(0;−1).

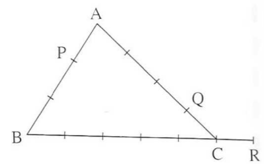
1) Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
Calculer les coordonnées de son centre L.

2) En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABD.

3) On note E le symétrique de C par rapport à D.
   a) Calculer les coordonnées de E.
   b) Les points E, G, B sont-ils alignés? (Justifier)

Ex 86 ☆☆ ★★

Dans la figure, les graduations sur les côtés du triangle ABC sont régulières.



1) Justifier que $(B; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$ est un repère du plan.
Déterminer les coordonnées des points P, Q et R dans ce repère.

2) Prouver que les points P, Q, R sont alignés.

Ex 87 ☆☆ ★★

Le plan est rapporté à un repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. On donne les points $A(-1;3)$, $B(3;1)$ et $C(-4;-1)$. Le point D est défini par l'égalité : $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$. On note I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].

1) Réaliser une figure et préciser la nature du quadrilatère ABDC.

2) Calculer les coordonnées des points D, I et J.

3) Les droites (AC) et (BD) se coupent en E.

- **a)** Justifier qu'il existe un réel k tel que
$$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}.$$
Écrire les coordonnées de E en fonction de k.
- **b)** Démontrer que $k = -\dfrac{1}{2}$, et en déduire les coordonnées de E.

4) Déterminer une équation de la droite (AD), puis une équation de la droite (BC).

5) Les droites (AD) et (BC) se coupent en F. Calculer les coordonnées de F.

6) Prouver que les points E, I, F et J sont alignés.

Ex 88 ★☆ ★★

Le plan est rapporté à un repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. On considère les droites :
$$\Delta : y = -x+2 \quad \text{et} \quad \mathscr{D} : 2x+y-6=0.$$

1) Calculer les coordonnées du point A, point d'intersection des droites $\mathscr{D}$ et Δ.

2) La droite $\mathscr{D}$ coupe l'axe des abscisses en E et l'axe des ordonnées en F.

La droite Δ coupe l'axe des abscisses en B et l'axe des ordonnées en C.

Calculer les coordonnées des points E, F, B et C.

3) Calculer l'aire du quadrilatère BCFE, puis l'aire du triangle ABE.

4) On note H le projeté orthogonal du point C sur la droite $\mathscr{D}$.

À l'aide des résultats précédents, calculer la distance CH.